1 Suites

Pourquoi travailler avec des suites :

Définition et notation :
Une suite (numérique) est une suite illimitée de termes.
Si la suite s'appelle u, les termes se notent $u(0)$, $u(1)$, $\ldots$, $u(n)$, etc. ou encore, avec une notation indicielle u_0, u_1, u_2, etc.
Le terme général est alors u_n et l'ensemble des termes de la suite se note (u_n).

2 Suites arithmétiques

2.1 Expression du terme de rang n de la suite (u_n)

Définition :
Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre a, appelé raison de la suite, tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + a$.
La différence entre deux termes consécutifs est constante.

Exemples : la suite des entiers naturels, la suite des entiers naturels pairs, la hauteur gravie en montant un escalier.

Remarque : on a :
$u_1 = u_0 + a$
$u_2 = u_1 + a = (u_0 + a) + a = u_0 + 2a$
$u_3 = u_2 + a = (u_0 + 2a) + a = u_0 + 3a$.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété :

- Si le terme initial est u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + na$.
- Si le terme initial est u_1, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_1 + (n-1)a$.

Exemple :
On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 4.
Alors l'expression du terme général de cette suite est :

$$u_n = u_0 + na = 2 + 4n$$

Calcul de u_{17} : on remplace n par 17 dans l'expression du terme général

$$u_{17} = 2 + 4 \times 17 = 70$$

Exercice 1 :
On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = -4$ et de raison 5.
Déterminer l'expression du terme général de cette suite. En Déduire u_8 et u_{20}.
Exercice 2 :
En 2008, un pays a consommé 20 tonnes d'un produit.
Depuis cette date, sa consommation augmente chaque année de 3 tonnes.
On note (u_n) le nombre de tonnes consommées en $2008 + n$.

1. Donner la nature de la suite (u_n). Justifier.
2. Déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n).
3. Calculer le nombre de tonnes consommées en 2010 et en 2015.
4. Avec un tableur, calculer le nombre total de tonnes de produits consommés par le pays de 2008 à 2015.

2.2 Somme de termes consécutifs de la suite (u_n)

Définition :

- Si le terme initial est u_0, alors la somme des p premiers de la suite (u_n) est :

$$u_n = u_0 + \cdots + u_{p-1}$$

(somme des p termes consécutifs de rangs 0 à $p-1$)

- Si le terme initial est u_1, alors la somme des p premiers de la suite (u_n) est :

$$u_n = u_1 + \cdots + u_p$$

(somme des p termes consécutifs de rangs 1 à p)

Exemple :

La somme des 6 premiers de la suite (u_n) est :

- $u_0 + \cdots + u_5$ si le terme initial est u_0.
- $u_1 + \cdots + u_6$ si le terme initial est u_1.

Exercice 3 :

Sur un prêt de 1500 € , un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique (u_n), de terme initial $u_1 = 100$ et de raison 50.

Avec un tableur, calculer le montant total du remboursement.

3 Suites géométriques

3.1 Expression du terme de rang n de la suite (u_n)

Définition :
Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre b, appelé raison de la suite, tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n \times b$.
Chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant toujours par le même nombre.

Exemple :
Monsieur Durand place une somme de 1 000 € à un taux d'intérêts composés de 4 %.
On note C_0 le capital initial et C_n le capital au bout de n années.
Pour tout n, on a : $C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1,04 \times C_n$.

Le coefficient multiplicateur de C_n à C_{n+1} est constant (indépendant de n) et égal à 1,04 donc (C_n) est une suite géométrique, de premier terme $C_0 = 1\,000$ et de raison $b = 1,04$.

Remarque : on a :
$u_1 = u_0 \times b$
$u_2 = u_1 \times b = (u_0 \times b) \times b = u_0 \times b^2$
$u_3 = u_2 \times b = \left(u_0 \times b^2\right) \times b = u_0 \times b^3$.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété :

- Si le terme initial est u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times b^n$.
- Si le terme initial est u_1, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_1 \times b^{n-1}$.

Exemple :
On considère la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 4.
Alors l'expression du terme général de cette suite est :

$$u_n = u_0 \times b^n = 2 \times 4^n$$

Calcul de u_3 : on remplace n par 3 dans l'expression du terme général

$$u_3 = 2 \times 4^3 = 128$$

Exercice 4 :
On considère la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_1 = 10$ et de raison 1,5.
Déterminer l'expression du terme général de cette suite. En déduire u_5 et u_{10} (donner une valeur appochée à 0,001 près si besoin)
Exercice 5 :
En 2008, un automobiliste a une dépense annuelle d'essence de 1200 €
Depuis cette date, sa consommation augmente de 3 % par an.
On note (v_n) le montant de la dépense en 2008 + n.

1. Donner la nature de la suite (v_n). Justifier.
2. Déterminer l'expression du terme général de la suite (v_n).
3. Calculer une valeur appochée du montant de sa dépense d'essence en 2010 et en 2015. On arrondirera à 10^{-3} près.
4. Avec un tableur, calculer une valeur appochée du montant total de sa dépense d'essence de 2008 à 2015. On arrondirera à 10^{-3} près.

3.2 Somme de termes consécutifs de la suite (u_n)

Définition :

- Si le terme initial est u_0, alors la somme des p premiers de la suite (u_n) est :

$$u_n = u_0 + \cdots + u_{p-1}$$

  (somme des p termes consécutifs de rangs 0 à $p-1$)
- Si le terme initial est u_1, alors la somme des p premiers de la suite (u_n) est :

$$u_n = u_1 + \cdots + u_p$$

  (somme des p termes consécutifs de rangs 1 à p)

Exemple :

La somme des 6 premiers de la suite (u_n) est :
- $u_0 + \cdots + u_5$ si le terme initial est u_0.
- $u_1 + \cdots + u_6$ si le terme initial est u_1.

Exercice 6 :
Un propriétaire loue un appartement à partir du 1er Janvier 2014 pour 6 ans.
Le montant annuel du loyer pour 2014 est de 6000 € , et il est augmenté chaque année de 2 %.
On note u_n le loyer payé en $2014 + n$.

Avec un tableur, calculer une valeur appochée du montant total des loyers versés pendant les 6 anneés. On arrondirera à l'unité.